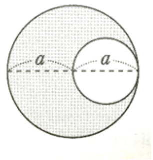
力学ICD演習解答例

演習12

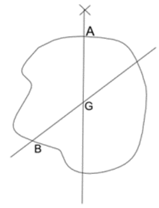
1. 右図のような形の薄い剛体の重心位置を求めよ。



（**解答例**）右図の剛体を「半径 aで質量mの大きな円板」と「半径 $a/2$で**マイナスの質量** $(-m/4)$ を持つ小さな円板[1]」（小さな円板の中心は大きな円板の中心（原点とする）より$+a/2$ずれている）を組み合わせたものと考える。重心の座標は重心の定義（式(7-1-10)）より、 $x_G = \dfrac{m \cdot 0 + (-m/4)(a/2)}{m + (-m/4)} = -\dfrac{a}{6}.$

よって、重心は大きな円の中心より左$a/6$ の位置にある。

2. 任意の形をした薄い剛体がある。今、右図のように点Aに糸をつけて吊り下げた。



(a)剛体が静止したとき、糸を下方に伸ばした線上に重心がある事を示せ。

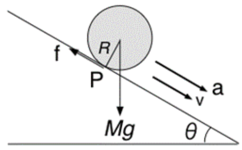
（**解答例**）力のモーメントがゼロになることが剛体の静止する条件の一つとなる（式(8-2-2)）。糸の固定端（図の×の位置）を原点Oとし重心への位置ベクトルを $\mathbf{r}_G$ （$|\mathbf{r}_G| = l$）、重心に働く重力を $M\mathbf{g}$ （$|M\mathbf{g}| = Mg$）とする。原点の周りの重力による力のモーメントは $\mathbf{N} = \mathbf{r}_G \times M\mathbf{g} = |\mathbf{r}_G||M\mathbf{g}|\sin\theta(-\mathbf{e}_z) = Mgl\sin\theta(-\mathbf{e}_z)$となる。ここで$l$ はOGの長さ、θ は鉛直方向と $\mathbf{r}_G$のなす角度、$(-\mathbf{e}_z)$ は紙面に垂直で奥向きの方向 $\otimes$ である。重心が鉛直方向にある場合($\theta = 0$) の場合、力のモーメントはゼロであるが、重心が鉛直方向からずれている場合($\theta \neq 0$)、力のモーメントの符号はθ の正負で逆になり、常に鉛直方向に向かうように力のモーメントが働く。よって、剛体が静止しているのは重心が鉛直方向にある場合のみである。すなわち、糸を下方に伸ばした線上に重心がある。

(b)A点と異なる点、B点においても同様の事をすれば、二つの線の交点に重心がある。この理由を述べよ。

（**解答例**）B点においてもA点と同様の事をすれば、やはり糸を下方に伸ばした線上に重心がある。したがって、重心はA点とB点の場合の両方を満たすのであるから二つの線の交点になる。

3. 図のように傾き θ の斜面を、すべらずに転がり落ちる半径 R、質量 M の円柱がある。このとき、重心の加速度 a を求めたい。この円柱の運動を重心の運動と重心を通る固定軸の周りの回転に分離して考える。

(1) 斜面に沿って座標軸を取った場合の重心の運動方程式を書け。ただし、摩擦力をf、重力加速度をgとする。



（**解答例**）剛体は自由度が６あるので、その運動を決めるには一般には重心の運動方程式とある点の周りの回転の方程式を組み合わせて解く必要がある（8.1節参照）。今、斜面下向きを x 軸正の方向とする。重心はこの方向へ動くので重心の運動方程式はx成分のみで良い。また、円柱の中心軸を固定軸とする回転が起こると考えて回転の運動方程式を立てる。次に、これら２つの方程式を組み合わせて解く。

・<重心の運動方程式>　重心に鉛直下方向きの重力$M\mathbf{g}$が働く。 円柱と斜面が接しているP点には摩擦力$\mathbf{f}$が $-x$ 方向に、また同じP点に斜面からの抗力$\mathbf{S}$ （斜面に垂直[2]）が働く。これらの斜面成分（x成分）の運動方程式を書くと、

$$Ma = M\frac{dv}{dt} = Mg\sin\theta - f \quad \cdots \text{(a)}$$

となる。ここで抗力$\mathbf{S}$ のx成分はゼロであることに注意。また、$|\mathbf{f}| = f,\ |\mathbf{g}| = g$、斜面下向きの速度の大きさを$v$とした。

(2) 重心を通る固定軸の周りの外力のモーメントN_Gを求めよ。

(3) 円柱の重心を通る固定軸の周りの慣性モーメントをI_Gとして回転運動の方程式をたてよ。回転の角速度はωとする。

（**(2)と(3)の解答例**）<回転の運動方程式> 式(8-3-3)より円柱の中心軸の周りの回転の方程式は $I_G\dfrac{d\omega}{dt} = N_G$ と書ける。ここで外力による中心軸の周りの力のモーメント$\mathbf{N}_G$ は、$\mathbf{N}_G = \mathbf{N}_g + \mathbf{N}_f + \mathbf{N}_S$ と書ける。$\mathbf{N}_g$ は重力による力のモーメント、$\mathbf{N}_f$ は摩擦力による力のモーメント、$\mathbf{N}_S$ は抗力による力のモーメントである。しかし、重力は重心に働くので$\mathbf{N}_g = 0$、また、円柱の中心軸からP点に引いた位置ベクトルを$\mathbf{r}_p$ とすると、$\mathbf{r}_p$は抗力$\mathbf{S}$と反平行なので抗力による力のモーメント$\mathbf{N}_S = \mathbf{r}_p \times \mathbf{S} = 0$ となる。よって、$\mathbf{N}_f$ のみが外力による力のモーメント$\mathbf{N}_G$となる。$\mathbf{N}_G = \mathbf{N}_f = \mathbf{r}_p \times \mathbf{f}$ となるがその向きは紙面垂直で奥向き（中心軸方向 $\otimes$）。$\mathbf{N}_G$の固定軸成分（中心軸成分）は $|\mathbf{N}_G| = |\mathbf{r}_p||f|\sin 90 = Rf$ なので、求める円柱の中心軸の周りの回転の方程式は

[1] この剛体は均一で面密度が場所に寄らないとするならば大きな円板と小さな円板の質量比は面積比になっている。

[2] 「垂直抗力」が正確。一方、斜面に平行な抗力の成分は、この問題のように「摩擦力」と呼ばれることが多い。

$$I_G \frac{d\omega}{dt} = Rf \qquad \cdots \text{(b)}$$ となる。

(4) (3)の回転の方程式をfについて解き、(1)の重心の運動方程式に代入しfを消去せよ。さらに滑らないで転がる条件 $v = R\omega$ （v は速度）、を使って、$a = \dfrac{g \sin\theta}{1 + I_G/(MR^2)}$ となることを示せ。

（解答例） 式(b)を f について解くと、$f = \dfrac{I_G}{R}\dfrac{d\omega}{dt}$. 滑らないで転がる条件は$v = R\omega$ なので、$\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{1}{R}\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{a}{R}$. よって、$f = \dfrac{I_G}{R^2}a$ となる。これを、式(a)に代入すると、$Ma = Mg\sin\theta - \dfrac{I_G}{R^2}a$. これを a について解くと、$a = \dfrac{g\sin\theta}{1 + I_G/(MR^2)}$が得られる。

(5) 円柱だけでなく、断面が円で半径R、質量M の４つの剛体（円筒、球殻、円柱、球）を同時に同じ高さから滑らずに転がした。それぞれの a を求め、斜面の下に到達する剛体の順序を述べよ。

（解答例） <u>滑らずに転がり落ちる場合は、慣性モーメントの大きさによって転がり落ちる加速度が異なる</u>。3.4.3節(8)より、円筒、球殻、円柱、球の中心軸の周りの慣性モーメントはそれぞれ、$MR^2, (2/3)MR^2, (1/2)MR^2, (2/5)MR^2$ なので、上のa のI_Gに代入すると、加速度はそれぞれ、$(1/2)g\sin\theta, (3/5)g\sin\theta, (2/3)g\sin\theta, (5/7)g\sin\theta$ となる。aの大きい順に斜面の下に到達するので、球、円柱、球殻、円筒の順となる。

4. 問3では重心を通る固定軸の周りの回転と考えたが、これと異なった方法で重心の加速度aを求めたい。すなわち、任意の瞬間では、この運動は図のP点を通る軸（円柱が斜面と接する部分）のまわりの回転とみなせるので、その回転運動から考えてみよう。以下の問いに答えよ。（注：このやり方では、摩擦力 f を、あらわに考えなくてもよくなる！）

（１）この物体の重心を通る固定軸のまわりの慣性モーメントを I_G としたとき、Pを通る軸のまわりの慣性モーメント I_Pを平行軸の定理を使い求めよ。**（解答）** 式(8-4-1)より $I_P = I_G + MR^2$

（２) P点を通る軸のまわりの各瞬間の力のモーメントN_Pを求めよ。

（解答例） $\mathbf{N}_p = \mathbf{N}_g + \mathbf{N}_f + \mathbf{N}_S$ であるが、垂直抗力と摩擦力はP点に働くので$\mathbf{N}_f = 0,\ \mathbf{N}_S = 0$. よって、$\mathbf{N}_p = \mathbf{N}_g = \mathbf{r}_G \times M\mathbf{g}$ となる。ここで、$\mathbf{r}_G$はP点から円柱の中心軸に引いた位置ベクトルである。$|\mathbf{r}_G| = R$ なので$|\mathbf{N}_p| = MgR\sin\theta$、向きは紙面に垂直で奥方向（中心軸方向 ⊗）。

３）回転の運動方程式 $I_P \dfrac{d\omega}{dt} = N_P$ より加速度aを求め、問3でもとめた値と同じになることを確かめよ。（すべらないで転がる条件 $v = R\omega$ に注意）

（解答例） $I_P \dfrac{d\omega}{dt} = N_P$ より、$(I_G + MR^2)\dfrac{d\omega}{dt} = MgR\sin\theta$. 滑らないで転がる条件より$\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{a}{R}$ を代入すると問3と同じaが得られる。

5. 問3をエネルギー保存則を使って解く。

（１）ある瞬間の重心の高さをｈとする。重心のポテンシャルエネルギーと運動エネルギーを書け（v, M, g, h を使う）

（解答） 式(8-5-4)より重心のポテンシャルはMgh、式(8-5-7)より重心の運動エネルギーは$(1/2)Mv^2$

（２）重心のまわりの回転エネルギーをI_G, v, R を使って書きなさい。**（解答）** 式(8-5-7)より、$(1/2)I_G\omega^2 = (1/2)I_G(v/R)^2$

（３）$\dfrac{dh}{dt} = -v\sin\theta$ であることを示せ。**（解答例）** 重心の速度の鉛直下向きの成分は$v\sin\theta$. なので、重心の高さhの時間変化は$-v\sin\theta$に等しい。これより与式が得られる。

（４）全力学的エネルギー（E）を書き、その時間微分がゼロ（エネルギー保存則が成り立つ）であることより、前問と同じ加速度aが求まることを示せ。

（解答例） 式(8-5-1)より、$E = (1/2)Mv^2 + (1/2)I_G(v/R)^2 + Mgh$. これの時間微分がゼロになるので、

$\dfrac{dE}{dt} = (1/2)M(2v)\dfrac{dv}{dt} + (1/2)I_G(1/R)^2(2v)\dfrac{dv}{dt} + Mg\dfrac{dh}{dt} = (M + (I_G/R^2))va + Mg(-v\sin\theta) = 0$ より、aについて解けば、

$a = \dfrac{g\sin\theta}{1 + I_G/(MR^2)}$が得られる